

連載 (講義)

## 電子光学入門

— 電子分光装置の理解のために —

(第6回)

嘉藤 誠

日本電子(株) 〒196-8558 東京都昭島市武蔵野 3-1-2

kato@jeol.co.jp

(2005年10月24日受理)

磁場が電子におよぼすローレンツ力には中心力場としての作用が内在し、これが磁場のレンズ作用を説明します。この作用は回転座標系、すなわちラーモア座標系のもとで抽出され、軸対称な磁場型レンズの光学特性はこの座標系のもとで解析されます。今回は、回転座標系の解析から始めて、ローレンツ力の性質を詳しく調べます。

### Introduction to Electron Optics for the Study of Energy Analyzing Systems (6)

M. Kato

JEOL Ltd., 3-1-2 Musashino, Akishima, Tokyo 196-8558.

kato@jeol.co.jp

(Received: October 20, 2005)

Lens action of a magnetic field is ascribed to the nature of a central force field existing in the Lorentz force. This function is revealed under a rotating coordinate system, i.e., the Larmor frame, which enables us to interpret an axially symmetric magnetic field as an electron lens. In this chapter, dynamics in a rotating coordinate system is described, and the characteristics of the Lorentz force are studied in detail.

## 6 ローレンツ力とレンズ作用

### 6.1 はじめに

軸対称性をもつ電子レンズは、大きくわけて静電型と磁場型があります。静電型レンズは、連続的な屈折率分布をもつ光学レンズと同一のはたらきをもち、直感的に理解しやすいものです。一方、磁場型レンズは光軸まわりの軌道のねじれをとまなうもので、光学では対応するものはありません。

磁場中の電子は、一般にらせん運動を行います。そのような運動がレンズ作用と見なされることはすでに第2章で見ましたが、そこでは数式による形式的な議論から出発しているので、なにか釈然としない思いが残ったはずです。

すなわち、サイクロトロン運動はどんな一点のまわりでも可能であるのにたいして、レンズ作用は、光軸という決まった方向に軌道を引きつける集束作用です。サイクロトロン運動をレンズ作用と直感的にむすびつけるのは容易ではなく、これが磁場型レンズの理解を難しくしています。

磁場が電子におよぼすローレンツ力を理解するために、回転座標系で現れる見かけの力であるコリオリ力を考えることができます。ローレンツ力とコリオリ力は、数式上は同じ形をしています。そこで、磁場の存在する系を回転座標系から眺めれば、両者が混ざり合い、ある特定の条件のもとでは打ち消し合うことも可能です。この事実が、磁場型レンズを解析するためのラーモア座標系の概念へと導きます。

磁場の作用は物理法則として自然から与えられたものですが、コリオリ力はそうではありません。コリオリ力は、座標変換という純粋に数学的な操作によって、われわれがいつでもつくりだすことができます。つまり、われわれにとって完全に理解可能な対象であるわけです。コリオリ力というものは徹底的に調べることができ、そしてそれは磁場の作用、さらには磁場型レンズの理解につながるものです。

今回は、回転座標系の解析から始めて、磁場中の電子の運動を詳しく調べます。一様磁場の作用やコリオリ力に関しては第2章の記述と重複しますが、特に断らずに基本的な部分から述べていきます。また、磁場型レンズの解析においては複素数の使用が不可欠ですので、なるべく早い段階で導入することにします。

## 6.2 ローレンツ力の作用

### 6.2.1 レンズ作用とは

磁場中の電子の運動をレンズ作用とむすびつけるために、まず一般に「電子のどのような運動がレンズ作用と見なされるのか」ということを考えておきます。

ふつうレンズ作用を表す場合、Fig.1のような図を描きます。これは、物面の一点  $P_o$  から出た電子軌道が像面の一点  $P_i$  に集束される様子を示しています。

この図で示されているのは、紙面にのる軌道、すなわちメリディオナル軌道だけです。一般に、物点と光軸を含む平面上にのる軌道がメリディオナル軌道とよばれます。実際には物面の一点からいろいろな方向に軌道が出て行くので、紙面をはみ出した軌道も存在します。そのような軌道がスキュー軌道です。

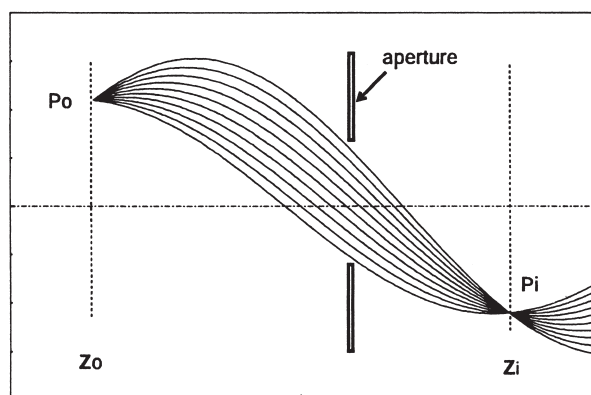


Fig. 1: Electron trajectories drawn on a meridional plane.

メリディオナル軌道に関しては、どのような作用が理想的なレンズ作用であるかは、すでに第4章 §4.2 で議論しました。すなわち、光軸からの距離に比例して軌道の傾きを変化させる作用、軌道方程式として書けば、

$$x''(z) = -b(z)x(z) \quad (1)$$

の形になれば、それは収差のないレンズとなります。

ただし、上式は十分条件であり、必ずしも軌道方程式がこの形でなくても、方程式が線形であれば収差をもちません。実際、静電レンズの1次軌道方程式は  $x'' + a(z)x' + b(z)x = 0$  という形でした。なお、上式で  $b(z)$  が負の領域では発散作用となりますが、以下では  $b(z)$  が正の集束作用の場合だけを考えます。

さて、(1) はメリディオナル軌道にたいしての方程式であり、これだけではスキュー軌道を考慮できません。任意の初期条件にたいしての軌道を決定するにはどうすればいいでしょうか。

もし系が軸対称であれば、軌道の  $x$  成分と  $y$  成分は独立に上式と同形の方程式に従うことが期待されます。すなわち、次の形です。

$$\begin{cases} x''(z) = -b(z)x(z) \\ y''(z) = -b(z)y(z) \end{cases} \quad (2)$$

あるいは、二つの成分をまとめてベクトル  $\mathbf{u}(z) = (x(z), y(z))$  のように表すなら、

$$\mathbf{u}'' = -b(z)\mathbf{u} \quad (3)$$

と書けます。

上式において、もし  $z$  を時間として考えて、 $xy$  平面上を運動する粒子の運動方程式と見るなら、右辺は粒子に作用する力に対応します。これはつねに原点方向を向くので、中心力場中の運動です。

もし  $b(z)$  が  $z$  によらない定数の場合は、(3) の右辺は原点からの距離に比例する引力となり、2次元調和振動子の運動方程式の形になります。2次元調和振動は、一般に原点を中心とする楕円運動となります。この特別な場合として、原点を中心とする円運動、および、原点を通る直線上を往復する1次元的な調和振動が可能です。

(3) を適当な初期条件のもとで解けば、スキュー軌道を含む一般の軌道を決定することができます。そのような軌道を図示しようとするれば、3次元的に描く必要があります。

Fig.2 はそのような例です。  $b(z)$  は定数として、物面の  $y$  軸上の物点から出た軌道のうち、アパーチャの外輪を通るものをいくつか描いたものです。

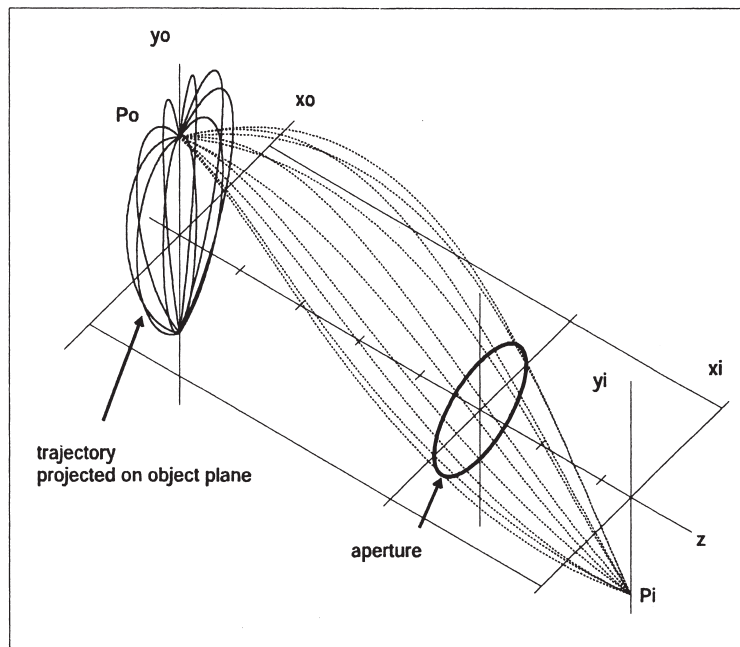


Fig. 2: Meridional and skew trajectories joining the object  $P_o$  and image  $P_i$ .

この図には、軌道を物面 ( $x_o y_o$  平面) 上に射影したのも描かれています。これを改めて物面上で描くと Fig.3 のようになります。これらの軌道は2次元調和振動であり、原点からの距離に比例した、原点に引き戻そうとする引力のもとでの運動であるわけです。このように、レンズ作用とは軌道を光軸方向に引き戻す作用であり、軌道を  $xy$  平面上に射影することで、その作用をはっきりと見てとることができます。

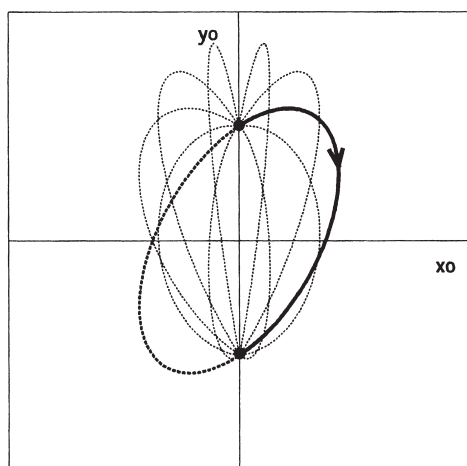


Fig. 3: Electron motion projected on an object plane obeys the equation of a two-dimensional harmonic oscillator.

なお、静電レンズの1次軌道方程式の場合は、加速度ベクトルに相当する  $u'' = (x''(z), y''(z))$  は原点方向を向きません。よって中心力場ではなくなります。これは中心力場中の運動で摩擦のある場合に相当し、だんだん原点に落ち込む減衰振動となります。(あるいは、負の摩擦によって振幅が増大する振動もありえます。) しかし、それは「軌道を光軸方向に引き戻す作用」であることには変わりありません。これが理想的なレンズ作用をこわすものでないことは、第4章で見たとおりです。

### 6.2.2 ローレンツ力の解析手法

磁場中の電子の運動を考えましょう。電子は  $xy$  平面上に拘束されていて、この運動を時間  $t$  をパラメータとして考えます。もし  $z$  方向に一樣な磁場分布があれば、電子は  $xy$  平面上で円運動、すなわちサイクロトロン運動を行います。

この運動の半径、すなわちサイクロトロン半径は初速に比例します。原点外の一点から、いくつかの初速を与えた場合を Fig.4 に示します。

磁場が電子におよぼすローレンツ力は、電子の速度ベクトルに直交し、したがって力の方向は決まった方向を向きません。決まった一点を向く (3) のような引力場は、磁場によって作り出すことはできません。

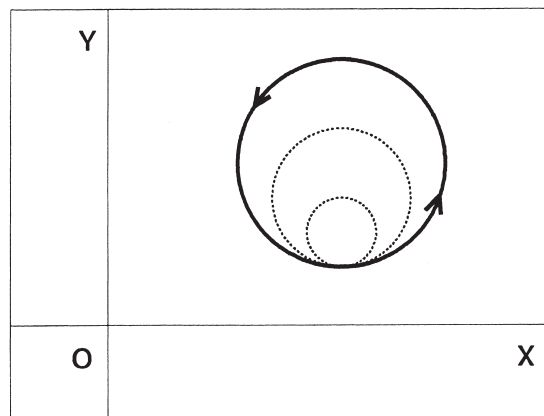


Fig. 4: Cyclotron motion of electrons in a uniform magnetic field.

つまり、磁場のおよぼすローレンツ力は、一見してレンズ作用とはまったく結びつかないような性質をもっています。

2次元の調和振動とサイクロトロン運動を比較してみましょう。両者を比較するなら、相違点を挙げるほうが楽でしょう。まず調和振動においては、引力の中心として、原点  $O$  が特別な意味をもちます。一方、サイクロトロン運動は、どの点を中心とする運動でも可能であり、すべての点が平等です。

また、2次元調和振動では原点  $O$  を中心とした右回り（時計回り）でも左回り（反時計回り）でも可能です。しかしサイクロトロン運動は、磁場の方向あるいは電荷の符号を変えない限り、片方の向きだけが可能です。すなわち、「特定の回転の向き」というものが存在します。

さらに角運動量に着目すると、2次元調和振動は中心力場中の運動なので、角運動量が保存します。（角運動量の定義などは後の節で述べます。）一方、ローレンツ力は中心力場ではないので、原点を中心とする円運動の場合を除けば角運動量は保存しません。

では、両者で似た点はあるでしょうか。2次元調和振動では、粒子は原点  $O$  に近づいてまた離れるという運動を繰り返します。しかし、サイクロトロン運動においてもこれは同様です。

この点は、原点から粒子までの距離だけに注目するとわかりやすいでしょう。任意の点を中心とするサイクロトロン運動においても、原点からの距離は大きくなったり小さくなったりの繰り返しです。つまり両者とも、原点からの距離だけに注目するならば似かよって見えるのです。

このように考えるなら、磁場のおよぼすローレン

ツ力には原点に向かう引力が内在していると言えそうです。しかし、こう言うだけでは漠然としていて、そのままでは役に立ちません。われわれの目標は、磁場の作用をレンズと見なし、それを光学理論の枠組みに取り込むことです。そのためには、サイクロトロン運動に内在する集束作用を、具体的に数式として抽出できなければなりません。

この問題に取り組むための切り口は二つあります。第一は、ローレンツ力は回転座標系において現れる見かけの力としてのコリオリ力と同形であるという事実です。もし磁場の存在する系を回転座標系から眺めれば、ローレンツ力とコリオリ力が混ぜ合わされ、あるいは両者が打消し合うような状況がつけられます。そのような座標系に視点を移すことで、ローレンツ力の作用を、より研究しやすい対象に変えることが可能です。

第二は、すでに先に触れたように、粒子の原点からの距離の変化を調べるという発想です。この定式化は、具体的には、極座標  $r\theta$  をもちいて  $r$  座標の時間発展に注目することで行われます。

極座標をもちいた場合、 $r$  座標と  $\theta$  座標は、(2) のように独立にふるまうことは期待できません。しかし、もし  $r$  座標の運動方程式を単独で記述できるような状況が可能であれば、やはり有用な解析手法となるでしょう。

以下の節では、これらの二つの手法のもとでローレンツ力の性質を解析します。両手法は座標変換という操作である点で共通であり、しかも回転座標と極座標はよく似ています。しかし両者は物理的には異なる意義をもち、電子光学において相補的な役割を果たします。

## 6.3 座標変換とローレンツ力

### 6.3.1 並進座標系への変換

物理現象を回転座標系から眺めようとする、いろいろな物理量の変換のし方が問題になります。われわれは磁場中の電子の運動を調べたいわけですから、まず磁場分布そのものに関して考える必要があります。

すなわち、磁場というものを回転しながら眺めた場合、同一の磁場分布として見えるか、あるいは何らかの変換を受けるのかという問題です。しかし、最初から回転系を考えるのは難しいので、この節では並進座標系への変換を考えます。

電磁場は荷電粒子にはたらく力を介して定義され、

そして力とは、質点の運動法則によって定義されるものです。そこで、つぎのニュートンの運動方程式をもとにして考察しましょう。

$$m\mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (4)$$

ここで、質量  $m$  をもつ粒子の加速度が  $\mathbf{A}$ 、粒子にはたらく力が  $\mathbf{F}$  です。

この運動法則がなりたつ座標系は慣性系とよばれます。ある慣性系にたいして一定の速度で並進運動する別の座標系も慣性系となり、これらは互いに平等であって区別はできません。粒子の加速度  $\mathbf{A}$  は、単に数学的な関係として、どの慣性系から見ても同じになります。よって、粒子にはたらく力  $\mathbf{F}$  も慣性系によらず同一でなければなりません。

ここで問題となるのは、力が座標系によらないということの意味です。たとえば粒子がバネで引かれながら運動している場合なら、そのバネの伸びが力の大きさを表わし、よって力は運動を眺める座標系にはよらないと言えます。しかし、粒子にはたらく力が電磁場からのものであった場合、状況はそれほど単純ではありません。

まず一つの慣性系  $S$  をとり、そのデカルト座標を  $XYZ$  とします。この系において磁場  $\mathbf{B}$  が存在したとすれば、荷電粒子にたいする運動方程式は、

$$m\mathbf{A} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (5)$$

となります。ここで、荷電粒子の電荷が  $q$ 、 $\mathbf{V}$  は粒子の速度ベクトルであり、右辺が磁場によるローレンツ力とよばれます。以下では簡単のために、 $\mathbf{B}$  は  $Z$  方向を向いた一様場であるとします。

(5) において問題なのは、粒子の速度  $\mathbf{V}$  が含まれていることです。加速度はすべての慣性系で同じ値として観測されますが、速度はそういうわけにはいきません。粒子の速度は、明らかに慣性系ごとに異なった大きさとして観測されます。

よって、(5) の左辺はすべての慣性系で同一であるのにたいして、右辺はそうではありません。このことだけで、(5) は物理法則として何かがおかしいことがわかります。しかし、この問題は次節まで棚上げして、(5) が成り立つという仮定のもとで話を進めます。

慣性系  $S$  の  $X$  方向に相対速度  $\mathbf{w}$  で並進運動する、別の慣性系  $S'$  を考えます。  $S'$  系のデカルト座標を  $xyz$  とし、 $X$  軸と同方向に  $x$  軸をとります。この二つの慣性系  $S$ 、 $S'$  において、両者から見た速度の関係を考えてみます。

$S$  系から見た粒子の速度ベクトルが  $\mathbf{V}$  であるとき、同じ運動を  $S'$  系から眺めたときの速度ベクトル  $\mathbf{v}$  との関係は、次のようになります。

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad (6)$$

この関係をもちいると、 $S$  系において (5) の右辺で与えられる力を、 $S'$  系にとっての量をもちいて表わすことができます。すなわち、(5) に (6) を代入して、 $\mathbf{A} = \mathbf{a}$  をもちいれば、

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{w} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

となります。

上式は、 $S$  系において (5) が成り立つ場合の、 $S'$  系における運動方程式です。(7) の右辺のうち、第1項はローレンツ力です。一方、第2項は、 $\mathbf{w}$  と  $\mathbf{B}$  が定ベクトルであるので、粒子の運動とは無関係な一定の力の場としてはたります。つまり  $S'$  系においては、ローレンツ力とはまったくタイプの異なる力が、新たに現れるということです。

$S$  系における磁場中で、荷電粒子は円運動、すなわちサイクロトロン運動を行います。これを  $S'$  から眺めるとどう見えるかを、実際に計算してみます。この結果を Fig.5 に示します。図は  $q < 0$  の場合で、電子を想定した計算です。サイクロトロン運動は単に同じ場所をぐるぐる回るだけですが、これを走りながらみれば、図のようにほどけて、らせんのように見えます。

この図において、 $S$  系から見た運動と  $S'$  系から見た運動は、各時刻で同一の力を受けていることに注意しましょう。つまり、両系において観測される粒子の加速度は同一であり、よって力  $\mathbf{F}$  も共通です。したがって、 $S'$  系に移ることで余分な力が付け加わるわけではなく、力  $\mathbf{F}$  をどう分類するかという「内わけ」が両系で異なります。

すなわち、まず  $S$  系で見れば、速度に直交する力、すなわちローレンツ力のもとでの運動です。しかしそれを  $S'$  系から見ると、ローレンツ力によっては説明がつかないような運動になります。もしローレンツ力だけなら、どんな初期条件をあたえても円運動にしかなりません。そこで、 $S'$  系の人から観測する運動を説明するためには、ローレンツ力とは異なるタイプの力が存在しなければなりません。

極端な場合として、 $t = 0$  において、 $S'$  系で粒子が静止して見えるように  $\mathbf{w}$  を選んだ場合を考えます。これが図の (b) です。この場合、 $S'$  系では粒子は初

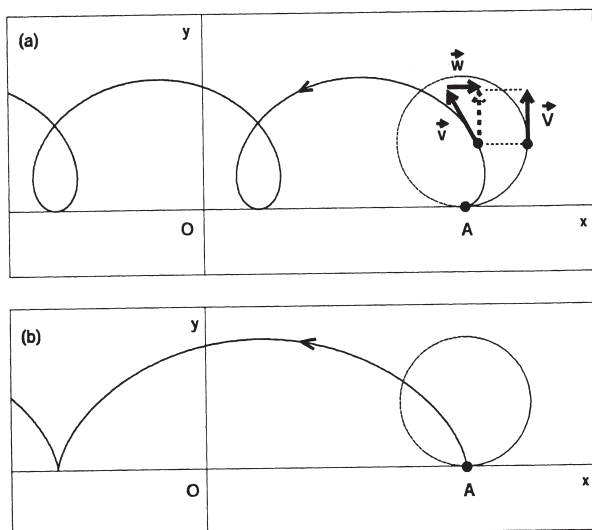


Fig. 5: (a) Cyclotron motion of an electron viewed from a moving frame with relative velocity  $w$ . (b) Trajectory of an electron becomes cycloid when  $w$  is equal to the initial velocity of the particle.

速をもたないので、 $t = 0$ でローレンツ力ははたきません。しかし、 $S'$ 系での運動は、 $S$ 系の運動を単に $-X$ 方向に引き伸ばしただけです。よって、とにかく図の上方向に動き出さなければなりません。そこで、図の上方向に向かう力が存在する必要があります。これが(7)の右辺第2項です。

なお、図のように円運動を一方向に引き伸ばした運動の軌跡は、一般にトロコイド (trochoid) とよばれます。トロコイドの特別な場合として、円盤を平面上でころがしたときに円盤の円周上の一点が描く軌跡がサイクロイド (cycloid) とよばれます。これがちょうど図 (b) の軌跡です。

### 6.3.2 座標変換にともなう電磁場の変化

前節において、 $S'$ 系から眺めた粒子の運動を論じるには(7)があればよく、新たに生じた力が何であるかという「解釈」は必ずしも必要ありません。電磁場の座標変換というテーマはこの解釈に関わることであり、避けて通ることもできます。

しかし、ここで新しく現れた項は、実は磁場のレンズ作用を説明するための力となります。これは本章のテーマに関与する部分なので、ここで述べておくことにします。

前節で考えた二つの座標系  $S$ ,  $S'$  は、ともに慣性系であり、互いに対等です。そこで、両系における運

動方程式は、同一の運動法則から導かれなければなりません。

しかしながら、(7)で新たに現れた右辺第2項の力は、 $S$ 系との関係をもちいて表されています。もしその力が実際に $S'$ 系において存在するのなら、それは $S$ 系との相対速度とは無関係に、 $S'$ 系で観測される物理量として説明されなければなりません。

この新しい力は速度に依らないので、磁場によって作りだされるものではありません。しかし電場による力、すなわち  $qE$  であると解釈すれば説明がつかます。そこで電場による力を加えて、運動法則は、

$$m\mathbf{A} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (8)$$

であるというところから出発します。 $S$ 系ではたまたま  $\mathbf{E} = 0$  なので(5)となっていて、 $S'$ 系では新たに電場が生じる結果として、 $S'$ 系における運動方程式が(7)に一致すればよいわけです。

この要請をすると、 $S$ 系において磁場  $\mathbf{B}$  があるとき、 $S'$ における電場  $\mathbf{E}'$  と磁場  $\mathbf{B}'$  がどのようなべきかが決まってしまう。  $S$ 系で電場も存在する一般の場合で考えれば、要求される変換は次のようになります。

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \end{cases} \quad (9)$$

こうすれば、 $S'$ 系での運動方程式は  $m\mathbf{a} = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}')$  となり、運動法則自身は  $S$ 系におけるものと同じになります。

しかしながら、運動方程式だけの都合で勝手に変換を決めても、現実に電磁場がこの通りに変換してくれる保証はありません。 $S'$ 系において観測される電磁場が、実際に上式のようになるかという問題です。

歴史的には、マックスウェル方程式が正しいという前提から電磁場の変換式が決定され、それをもちいて相対論的に正しい運動方程式が導出されました。そこで、非相対論的な運動方程式から導いた上の関係は、厳密にはマックスウェル方程式と矛盾します。正確な電磁場の変換法則は、電磁気学の教科書において、たいていは相対論がらみで述べられています。その非相対論的な極限を考えれば、(9)が得られます。

磁場の中を走り抜けると電場が見えるという事実は、実際に観測にかかるものです。たとえば、飛行機の視野がさえぎられていても、電場を測定すれば地磁気との相対速度がわかるはず。ただし、現実には電場強度が小さすぎて実用にはならないようです。

なお、前節の Fig.5 の計算結果とここでの議論を合わせると、次のことが言えます。磁場中でサイクロトロン運動をしている荷電粒子があるとき、磁場と直交する方向に電場をかけると、電場と磁場の両方に直交する方向にドリフトを始めます。この事実は、マグネトロン (magnetron) とよばれるマイクロ波発振管に応用されています。

さて、以上は磁場の存在する系を並進座標系に移って見るときの話でした。そのように一方向に走りながら眺めるのではなく、ある一点のまわりに回転しても、やはり電場は現れるでしょう。

一方向に走る場合は、それに直交する方向に電場が生じました。そこで、回りながら見る場合は、その運動に直交する方向、すなわち回転中心方向に電場が生じるはずで

この電場が磁場のレンズ作用である、と言いたいところですが、しかし並進座標系と回転座標系は決定的な違いがあります。すなわち、ある慣性系から並進系へ移っても、それは依然として慣性系であり、運動法則は不変です。

一方、回転座標系は慣性系ではないので、運動法則そのものが変わってしまいます。すなわち、いわゆる見かけの力が生じ、これを同時に考慮しなければなりません。

電磁場の座標変換が単純でないのは、荷電粒子にはたらく力が、速度に依存する成分とそうでない成分に分類されるからです。座標系が変われば速度の見え方が変わり、それにともなって電場と磁場の役割が混ぜ合わされます。しかしトータルとしての力には変更がなく、変わるはその「内わけ」だけです。一方、非慣性系に移ることで生じる見かけの力は、新たに付け加わる力です。これらは明確に区別しなければなりません。

なお、回転座標系に移ると電場が生じると言いましたが、それはあくまで、回転系の上で生活している人にとっては電場として観測されるということです。回転系から見た運動を解析するために、かならずしもそのような視点で考察する必要はありません。この節の最初で「解釈の問題である」と言ったのは、このような意味です。

## 6.4 回転座標系と見かけの力

### 6.4.1 回転座標系への変換

ここでは運動方程式を回転座標系に変換する方法を述べます。ある慣性系  $S_0$  において、質点が  $XY$  平面上に拘束されているとします。(以下の節では、慣性系を  $S_0$ 、回転系をその角速度で区別して  $S$ ,  $S'$ , ... のようによぶことにします。)

$S_0$  系において粒子にまったく力がはたらかないとすれば、運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{X} = 0 \\ m\ddot{Y} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

となります。 $XY$  座標にたいして、原点を共有して角速度  $\omega$  で回転する座標  $xy$  を考え、対応する系を  $S$  とよびます。 $XY$  座標と  $xy$  座標の関係は、

$$\begin{cases} X = x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ Y = x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{cases} \quad (11)$$

で与えられます。

(10) を回転座標系に変換するという事は、(11) を (10) に代入して、 $x(t)$  と  $y(t)$  のみたすべき微分方程式、すなわち  $S$  系における運動方程式を導くということです。そのためには、(11) の  $t$  に関する 2 階微分を計算しなければなりません。

まず、(11) を  $t$  で微分すると、

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t - \omega x \sin \omega t - \omega y \cos \omega t \\ \dot{Y} = \dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t + \omega x \cos \omega t - \omega y \sin \omega t \end{cases} \quad (12)$$

となります。これは、粒子の運動を  $S_0$  系から眺めたときの速度ベクトルの成分  $(\dot{X}, \dot{Y})$  と、 $S$  系から眺めたときの速度ベクトル成分  $(\dot{x}, \dot{y})$  の関係を与えています。

これをもう一回  $t$  について微分しなければならないわけですが、これは予想されるように、あまり楽しい計算ではありません。このような成分ごとの微分ではなく、ベクトルとして二成分をまとめたまま計算ができればよいでしょう。

そこで、上で行った計算をベクトル表記で行うことを試みてみます。まず (11) は、ベクトルと行列をもちいて次のように書けます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (13)$$

これを次のようにおきます。

$$\mathbf{R} = O(\omega t) \mathbf{r} \quad (14)$$

ここで  $O(\omega t)$  は、ベクトルを  $\omega t$  の角度だけ回転する行列です。

(14) は、ベクトル  $\mathbf{R}$  を回転して別のベクトル  $\mathbf{r}$  になるという意味ではなく、同一のベクトルを別々の座標系から見たときの成分の関係を表しています。すなわち、ここでベクトルとして表しているものは、実体としてのベクトルそのものではなく、それを特定の座標系から見たときの成分です。たとえベクトルとして同一であっても、座標系が違えば成分が違うので、異なる名前のベクトルとして表す必要があります。

さて、(12) の計算過程を反省してみれば、この計算は (14) の行列表記のままで、次のように実行できることがわかります。

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{O}\mathbf{r} + O\dot{\mathbf{r}} \quad (15)$$

ここで  $\dot{O}$  は、行列  $O = O(\omega t)$  を成分ごとに時間微分したもので、

$$\begin{aligned} \dot{O} &= \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t & -\omega \cos \omega t \\ \omega \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \\ &= \omega J O \end{aligned} \quad (16)$$

のように書けます。ここで、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

とおきましたが、これは一般にベクトル  $(a, b)$  に作用して  $(-b, a)$  を与える、すなわち  $90^\circ$  だけ回転する行列です。  $90^\circ$  回転を2回繰り返すとベクトルの向きが反転するので、  $J^2 = -I$ 、ここで  $I$  は単位行列です。

さて、(15) に  $\dot{O} = \omega J O$  を入れると、  $\dot{\mathbf{R}} = O(\dot{\mathbf{r}} + \omega J \mathbf{r})$  となります。ここで二つの速度成分を  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ 、  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  のように表せば、次式が得られます。

$$\mathbf{V} = O(\mathbf{v} + \omega J \mathbf{r}) \quad (18)$$

上式は、(12) の結果をベクトル形式で書いたものになっています。(12) という結果だけを見ても、回転行列  $O$  でくくれるということは、なかなか気づきません。

(18) の解釈を考えてみます。仮に、(18) が  $\mathbf{V} = O\mathbf{v}$  であったとしましょう。これは (14) と同じ形ですから、  $S$  系から見た速度ベクトルの二成分  $\mathbf{v}$  を角度  $\omega t$  だけ回したものが、  $S_0$  系にとっての速度成分  $\mathbf{V}$  であ

るということです。つまり、座標の向きが異なることによる成分の変換でしかありません。

ところが、  $S_0$  系にたいして  $S$  系は運動しているので、 §6.3.1 のときと同様に、両者の相対速度の分だけ速度は異なって見えます。 §6.3.1 では相対速度ベクトル  $\mathbf{w}$  は定ベクトルでしたが、回転座標系に移った場合は、原点から遠ざかるほど両者の相対速度は大きくなります。よって  $\mathbf{w}$  はベクトル場となります。(18) は、その相対速度ベクトル場が、

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \omega J \mathbf{r} \quad (19)$$

であることを示しています。

そこで、(18) の意味をまとめると次のようになります。  $S$  系から見た速度ベクトルの成分  $\mathbf{v}$  にたいして、相対速度  $\mathbf{w} = \omega J \mathbf{r}$  を加えたもの、すなわち  $\mathbf{v} + \omega J \mathbf{r}$  が、  $S_0$  から見た速度ベクトルです。しかしこの表式は、  $S$  系から見た成分として与えられています。これを  $S_0$  系から見た成分で表すために、両座標系間の成分の変換 (14) を行います。最終的に得られる  $\mathbf{V}$  が、「  $S_0$  から運動を眺めたときの速度ベクトルを  $S_0$  の座標で表した成分」を与えます。

さて、(18) をさらに  $t$  で微分して、加速度  $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}}$  を求める必要があります。これは (16)、すなわち  $\dot{O} = \omega J O$  をもちいれば次のように行えます。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \dot{O}(\mathbf{v} + \omega J \mathbf{r}) + O(\dot{\mathbf{v}} + \omega J \dot{\mathbf{r}}) \\ &= O(\mathbf{a} + 2\omega J \mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$  は  $S$  系から見た加速度ベクトルです。

以上によって、座標、速度、加速度の変換式が求められたこととなります。まとめて書けば次のようになります。

$$\begin{cases} \mathbf{R} = O\mathbf{r} \\ \mathbf{V} = O(\mathbf{v} + \omega J \mathbf{r}) \\ \mathbf{A} = O(\mathbf{a} + 2\omega J \mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{r}) \end{cases} \quad (21)$$

さて、ここでの目的は、慣性系  $S_0$  における運動方程式 (10) を、回転系  $S$  から見たものに変換することでした。(10) は  $m\mathbf{A} = 0$  であり、これに上式の  $\mathbf{A}$  の表式を代入すれば、結局  $S$  系における運動方程式として、次式が得られます。

$$m\mathbf{a} = -2m\omega J \mathbf{v} + m\omega^2 \mathbf{r} \quad (22)$$

上式の右辺が見かけの力とよばれるものです。第1項はコリオリ力、第2項は遠心力です。これらの性質は §6.5 で議論します。



### 6.4.2 複素数による表記

前節のようにベクトル表記をもちいた計算は、成分ごとに扱うよりも簡潔であり、得られた結果の幾何学的意味を考えるためにも有用です。しかし、ベクトル表記よりさらに便利なのは、複素数をもちいる手法です。これをここで説明します。

まず前節の  $S_0$  系と  $S$  系における座標を、それぞれ  $U = X + iY$ ,  $u = x + iy$  という複素数で表します。このとき、(11) の関係は、

$$U = ue^{i\omega t} \quad (23)$$

と書けます。ここで  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  であり、これはいわゆるオイラーの公式です。  $e^{i\omega t}$  が、ベクトルに作用する回転行列  $O(\omega t)$  と同じ操作を行います。

虚数単位  $i$  は、 $90^\circ$  回転の行列  $J$  に対応します。すなわち、任意の複素数  $a + ib$  に虚数単位  $i$  をかけると  $i(a + ib) = -b + ia$  となり、 $xy$  平面上では  $90^\circ$  回転、すなわち  $(a, b) \rightarrow (-b, a)$  という作用となります。

(23) はふつうの  $t$  の関数のように微分することができます。すなわち、 $d(e^{i\omega t})/dt = i\omega e^{i\omega t}$  であり、したがって  $\dot{U} = i\omega ue^{i\omega t} + i\omega ue^{i\omega t}$  のように計算できます。さらに微分すれば加速度  $\ddot{U}$  が得られ、結果をまとめて書けば次のようになります。

$$\begin{cases} \dot{U} = (i\dot{u} + i\omega u)e^{i\omega t} \\ \ddot{U} = (i\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u)e^{i\omega t} \end{cases} \quad (24)$$

(23) と (24) を合わせたものが、ベクトル表記での (21) に対応します。前節で最終的に得られた運動方程式 (22) は、複素数で表せば、

$$m\ddot{u} = -2m\omega(i\dot{u}) + m\omega^2 u \quad (25)$$

となります。

ベクトル表記と複素数表記を比較してみましょう。ベクトル表記においては、どれがベクトルでどれが行列であるかを常に意識する必要があり、行列はかならず、作用するベクトルの前に書く必要があります。またベクトルや行列の微分は、一般にはあらかじめ成分ごとに微分を済ませたのちに、それらをまた行列かベクトルとしてまとめ直す必要があります。

一方、複素数として与えられた関数を微分するには、単に通常関数として微分するだけです。複素数の四則演算の規則は、実数とまったく同じです。よって積の順番を気にする必要はありません。実数、ベクトル、行列という区別は必要なく、複素数表記においてはすべて複素数として扱われます。

複素数表記のメリットは、機械的な計算が可能ということですが。この特徴は、数式の変形を計算機にやらせようとするときに顕著になります。電子光学の分野では、大型計算機が主流の時代から数式処理プログラムが活用され、収差公式の導出などが行なわれました。最近では *Mathematica* のような PC 用の数式処理ソフトが普及して、手軽に利用できます。

数式処理のプログラムを書く場合に、ベクトルや行列をかたまりとして保持するのは困難です。一度成分に分けて微分計算などをした後で、その結果を、幾何学的な意味がわかりやすいようにベクトルや行列でまとめさせることは難しく、人間が介入しなければなりません。たとえば、前節の (12) のような計算をさせたとしましょう。それを (18) のように、幾何学的な意味を考えながらまとめなおすプログラムを書くのは困難です。結局、最後まで成分ごとに計算させるしかありません。

しかし複素数表記を用いれば、 $(x, y)$  というベクトル成分のかわりに、 $u$  のかたまりのまま、ふつうの数として計算を続けることができます。もし途中で  $i^2$  が現れたら、 $-1$  におきかえればよいだけです。このようなメリットは、計算機をもちいる場合だけではなく、人間が紙と鉛筆で計算する際にもそのまま生きるものです。

さて前節では、なるべく行列とベクトルのかたまりのまま計算ができるような工夫をしました。行列  $J$  は  $J^2 = -I$  という性質をもち、虚数単位  $i$  の役割をはたします。そこで、前節の計算はかなり複素数としての計算に近いものです。

このような対応をもちいると、複素数というものの意味を、1 次変換と関連付けて理解することができます。これに関して以下で述べておきます。

まず、二つの複素数  $a + ib$  と  $x + iy$  の積を考えると、 $(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$  ですから、これは  $(x, y)$  というベクトルに次の行列を作用させる 1 次変換に対応します。

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (26)$$

一般に、 $2 \times 2$  行列によって与えられる 1 次変換は四つの実数の自由度をもちますが、上の行列は二つの実数の自由度しかありません。つまり、任意の 1 次変換がつくる集合のうちの一部だけを表しています。このような 1 次変換の図形的な意味は、ある角度の回転と、原点にたいして定数倍だけ拡大する作用の合成であることを示すことができます。

行列 (26) は  $aI + bJ$  と書け、二つの行列  $I, J$  は積に関して可換なので、このような形に書かれた行列はすべて可換となります。そこで、実数と同じ四則演算を行わせることができ、演算の途中で  $J^2$  がでてきたら  $-I$  におきかえることで、結果はいつでも  $xI + yJ$  の形に書けます。

すなわち、 $xI + yJ$  の形で書けるような行列の集合は、実数の四則演算の性質を保持したまま拡張したのになっています。(26) は二つの自由度をもつにもかかわらず、ふつうの数のようにふるまうのです。

複素数を習うとき、虚数単位  $i$  とは自乗して  $-1$  になるものであると言われて、素直に納得できる人はいないでしょう。しかし行列の世界では、かけ合わせて  $-I$  となるものは  $90^\circ$  回転であり、なんの不思議もなく理解できます。そのような行列の演算を、複素数という形式のもとで行っていると考えれば、複素数にたいする心理的抵抗も薄まるでしょう。

なお、積の可換性を保ったまま実数を拡張したものは、複素数、あるいはそれと 1 対 1 に対応するものしか有り得ないことが知られています。数の歴史は、自然数から始まって、0 と負の整数が発見され、そして実数、複素数のように拡張されてきました。しかし、複素数より先はないというわけです。

回転行列と複素数の対応について、最後に記しておきます。任意のベクトル  $r$  を原点まわりに  $\theta$  だけ回転する行列を  $O(\theta)$  とします。もし  $\theta$  が十分小さければ、回転前後のベクトルの変化分は  $r$  を  $90^\circ$  回転した方向を向きます。無限小の回転角を  $\Delta\theta$  と書けば、無限小回転の変換は、

$$O(\Delta\theta) = I + \Delta\theta J \quad (27)$$

と書けます。前節では回転行列を微分する際に  $J$  が現れましたが、これは  $J$  の無限小回転としてのはたらきに因るものです。

(27) は  $aI + bJ$  の形をしていて、よってこの行列を掛け合わせてもこの形を保ちます。任意の角度  $\theta$  の回転は無限小回転を掛け合わせることで行われるので、このことを数式で表してみましょう。まず、 $\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \dots + \Delta\theta_n$  と分割して、それぞれの項に対応する無限小回転を掛け合わせれば、 $n \rightarrow \infty$  の極限で考えて、

$$\begin{aligned} O(\theta) &= (I + \Delta\theta_1 J)(I + \Delta\theta_2 J) \cdots (I + \Delta\theta_n J) \\ &= I + (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \dots) J \\ &\quad + \frac{1}{2!} (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \dots)^2 J^2 + \dots \end{aligned}$$

$$= I + \theta J + \frac{\theta^2}{2!} J^2 + \dots \quad (28)$$

という関係が得られます。これを、 $O(\theta)$  という行列を  $\theta$  に関してテイラー展開したものと見ると、この式は指数関数のテイラー展開、すなわち、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (29)$$

と同じ形をしています。

そこで (28) を、 $O(\theta) = e^{\theta J}$  と書くことにします。これを複素数に対応させれば、 $e^{i\theta}$  となるわけです。

このように指数関数を拡張した概念は、なにかの無限小変換をつなげて有限の変換をつくる際に、いつも現れます。たとえば微分方程式の摂動展開、あるいはその数値解法を考える際に、このような指数関数が活躍します。

なお (28) において、 $J^2 = -I$  をもちいて  $aI + bJ$  の形にまとめれば、 $e^{\theta J} = I \cos \theta + J \sin \theta$  となることが示されます。よってオイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  も、1 次変換の言葉で理解できるわけです。

## 6.5 コリオリ力と遠心力

### 6.5.1 見かけの力について

慣性系  $S_0$  が自由空間であるとして、それにたいして角速度  $\omega$  で回転する座標系  $S$  を考えると、 $S$  系における質点の運動方程式は、§6.4 の (22)、すなわち、

$$ma = -2m\omega Jv + m\omega^2 r \quad (30)$$

で与えられます。この右辺が、見かけの力としてのコリオリ力と遠心力です。

われわれはローレンツ力のもとの電子の運動はよく知っているのですが、コリオリ力の性質はお馴染みです。コリオリ力は粒子の速度ベクトル  $v$  に直交します。この力の方向は  $\omega$  の符号に依存し、もし  $\omega > 0$  なら進行方向にたいして右向き、 $\omega < 0$  なら左向きの力となります。

このように、コリオリ力はある特定の回転方向とむすびついた方向性をもっています。一方、遠心力は  $\omega$  の符号とは無関係に、いつでも原点から遠ざける方向にはたらきます。

さて、(30) の右辺を見かけの力とよぶのは、回転系から眺めたときにあたかもそのような力を受けているように見える、ということです。回転系  $S$  の上に乗って生活している人がいたとして、その人が自分

が回転していることを知らなければ、右辺の力は実在の力と区別が付きません。

すなわち見かけの力とは、回転系  $S$  で観測される粒子の運動を説明するために、慣性系  $S_0$  における運動法則をそのまま適用するための概念です。

なお、§6.3 では電磁場の変換にもなって現れる力を議論しましたが、それは見かけの力ではないことに注意する必要があります。そこでは慣性系どうしの変換を考えていたので、ローレンツ力を変換してでてくる電場の力は本当の力です。すなわち、相対的に運動しているためにそのような力がはたらいて見える、というわけではありません。

コリオリ力の性質は、よく地球の自転と関連づけて説明されます。北極上空から北半球を見下ろしたとき、地球の自転の向きは左まわり（反時計回り）であり、 $\omega > 0$  の場合です。よってコリオリ力は、進行方向にたいして右向きにはたらくします。

ところが、北半球での台風の渦は左巻きであり、これがよく議論的になります。左巻きというのは、水槽に腕を入れて左回りに回したときにできる渦の向きです。これは一見、コリオリ力の作用と逆向きのように思ってしまうのですが、右に逃げようとする風を低気圧が引きずり込もうとすることで、結果的に左巻きの渦となります。

### 6.5.2 コリオリ力の打消し

見かけの力としてのコリオリ力は、いつも遠心力とペアで現れます。両者の力のタイプは全く異なります。しかし、コリオリ力と遠心力の存在する系は、固定座標系にもどれば、すなわち逆方向に回転する座標系に移れば、当然ながら自由空間に戻ります。

そこで、コリオリ力は遠心力とは相補的な関係、つまり「両方そろえば自由空間に戻る関係」と見なすことができるでしょう。コリオリ力は、遠心力とペアで存在すれば、自由空間とある意味で対等であるということです。

この関係を念頭におけば、もしコリオリ力だけが存在する系があった場合、うまく回転系に移れば、遠心力と逆の作用、すなわち原点に向かう向心力が現れるのではないかという発想がでできます。つまり、コリオリ力と遠心力は「足してゼロ」ですから、コリオリ力が打ち消される座標系においては、向心力が残るのではないかということです。

この予想を確かめるには、まずコリオリ力と遠心力がそれぞれ、回転系間の変換でどのようにふるま

うかを調べる必要があります。

慣性系  $S_0$  にたいして、角速度  $\omega$  で回転する  $S$  系における運動方程式は (30) でした。この  $S$  系にたいして角速度  $\omega'$  で回転する座標系を考え、これを  $S'$  系とよびます。これは結局、もとの  $S_0$  系から直接  $\omega + \omega'$  で回転する系に移るのと同じなので、 $S'$  系での運動方程式は次のようになります。

$$m\mathbf{a}' = -2m(\omega + \omega')J\mathbf{v}' + m(\omega + \omega')^2\mathbf{r}' \quad (31)$$

このように、回転系間の座標変換の合成は非常に単純です。しかしそれは、コリオリ力と遠心力をひとまとめにして扱っているからです。(31) は二つの力がそれぞれどのように変換された結果であるか？これを考えてみると、状況はそれほど単純ではないことに気がつきます。

簡単のために、 $\omega' = -\omega$  の場合で考えましょう。このとき、 $S'$  系は自由空間に戻るので、 $S$  系において存在した見かけの力はすべて 0 になるべきです。この「0 になる」ということを、次のように考えたいくなります。すなわち、 $S'$  系に移ることで生じるコリオリ力がもとのコリオリ力を打ち消し、同様に、新たに生じる遠心力がもとの遠心力を打ち消す、ということです。

しかしながら、これがありえないことは、遠心力の性質を考えればわかります。つまり、遠心力は  $\omega^2$  に比例し、座標がどちら向きに回るかは無関係に、名前のおりにいつも原点にたいして外向きの力です。したがって、遠心力が互いに打ち消し合うことはありません。

では以下において、実際に (30) を座標変換して、(31) に至る過程を追ってみます。この計算のために、 $S_0$  系から  $S$  系への変換の際に用いた (21) と同様の関係、すなわち、

$$\begin{cases} \mathbf{r} = O'\mathbf{r}' \\ \mathbf{v} = O'(\mathbf{v}' + \omega'J\mathbf{r}') \\ \mathbf{a} = O'(\mathbf{a}' + 2\omega'J\mathbf{v}' - \omega'^2\mathbf{r}') \end{cases} \quad (32)$$

をもちいます。ここで  $O' = O(\omega't)$  は、 $S$  系から  $S'$  系への座標変換のための回転行列です。

$S_0$  系は自由空間と仮定していたので、 $S_0$  から  $S$  系へ移る際は、単に加速度  $\mathbf{A}$  を  $S$  系から見たものに交換するだけでした。しかし、 $S$  系においては (30) の右辺に  $\mathbf{r}$  も  $\mathbf{v}$  も含まれるので、(32) のすべてが必要

です。(30) に (32) の関係を入れれば、回転行列は共通因

子となって落ちて、次式が得られます。

$$m\mathbf{a}' + 2m\omega'J\mathbf{v}' - m\omega'^2\mathbf{r}' = [-2m\omega'J\mathbf{v}' + 2m\omega'\omega'\mathbf{r}'] + m\omega'^2\mathbf{r}' \quad (33)$$

これは、移項を行わずに (30) の形のままで示しています。もし移項を行って整理すれば、(31) になることが確認できます。

上式において、左辺の第2項と第3項は、加速度の変換によって新たに付け加わるコリオリ力と遠心力です。一方、右辺の [...] の部分は、もともと存在したコリオリ力が変換されたものです。コリオリ力は速度に依存し、(32) の第2式が代入される結果として、新たな項  $2m\omega'\omega'\mathbf{r}'$  が生じます。なお (33) の右辺の最後の項は、もとの系における遠心力です。

コリオリ力の変換で生じた新しい力は、磁場を走りながら眺めるときに現れる電場の力に対応するものです。ローレンツ力においては、運動する座標系に移ったとき、相対速度ベクトル  $\mathbf{w}$  に直交する方向に電場が生じるのでした。いまの場合は、 $\mathbf{w}$  は原点をとりまく回転対称なベクトル場 (19) であり、そのベクトル場に直交する力の場として、中心力場が生じます。

重要なことは、この新たな力  $2m\omega'\omega'\mathbf{r}'$  が、遠心力と同じタイプの中心力であるということです。遠心力になるか向心力になるかは  $\omega'$  の符号しですが、どちらにせよ、座標変換の際に遠心力と混ざり合うこととなります。先に考えた  $\omega' = -\omega$  の場合は、この力は向心力となります。これが、もともとあった遠心力と新たに生じた遠心力をそっくり打ち消してくれるおかげで、最終的に合力が0となるのです。

以上のように、コリオリ力と遠心力がどのように座標変換を受けるかという問題は、かなり複雑です。このように複雑になる理由は、上の変換において、本質的に異なる二種類の変換が同時に含まれているからです。

その第一は、コリオリ力が速度に依存するために、座標系が変わると別種の力が生じることです。これは移る先が慣性系か非慣性系かに関わらず、新旧の座標系が相対速度をもつ限り、必ず生じます。そして第二は、非慣性系間の変換であるために、もともと存在していた見かけの力にたいして、新たな見かけの力がさらに付け加わるということです。

コリオリ力と遠心力の関係は、磁場と電場の関係に類似しています。座標変換で電場と磁場が混ざり合い、新たな電磁場となるのと同様に、コリオリ力

と遠心力もまた、回転系間の変換で混ぜ合わされて、新たな見かけの力を構成します。

さて、ここで最終的に考えたいのは、 $S$  系においてコリオリ力だけが存在する場合です。このときは、(33) における右辺の  $m\omega'^2\mathbf{r}'$ 、すなわちもともと存在していた遠心力を0とおけばよいわけです。 $\omega' = -\omega$  の場合、 $S'$  系での運動方程式は、

$$m\mathbf{a}' = -m\omega'^2\mathbf{r}' \quad (34)$$

となります。つまり、コリオリ力は打ち消されて、向心力が現れます。 $m\mathbf{a}'$  はもし  $S$  系において遠心力  $m\omega^2\mathbf{r}$  があれば0になるべき量なので、遠心力がなければ、その符号を逆にしたものが残るということです。

これは、本節の最初に予想したとおりの結果であり、当たりまえのようにも思えます。しかしそうではないことは、上と逆の場合、すなわち  $S$  系において遠心力だけがある場合を考えればわかります。この場合は、(33) において右辺の [...] の部分がない場合なので、

$$m\mathbf{a}' = 2m\omega'J\mathbf{v}' + 2m\omega'^2\mathbf{r}' \quad (35)$$

となります。すなわち、遠心力が消えてコリオリ力が現れるというわけではありません。コリオリ力は確かに現れますが、遠心力はただ単純に足されてもとの2倍になるだけです。

さて、われわれにとっては (34) の結果がすべてです。(34) はすなわち、ローレンツ力が中心力に見えるような座標系が存在するという事です。この座標系は、磁場をレンズとして解析することを可能にするものです。

## 6.6 角運動量と中心力場

### 6.6.1 角運動量保存則

コリオリ力は、うまく回転座標系に移れば中心力のように見える、というのが前節の結果でした。一般に、中心力場のもとでの運動が共通にもつ性質として、角運動量の保存があります。これをここで考えます。

質点の運動にともなう角運動量は、

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (36)$$

で定義されます。この量は原点  $O$  の選び方に依存するので、正確には  $O$  まわりの角運動量とよびます。

もし運動が  $xy$  平面上で起こるとすれば、 $\mathbf{r} = (x, y)$  として、 $\mathbf{M} = m(xy\hat{j} - yx\hat{i})$  のように書けます。さら

に、極座標  $r\theta$  をもちいて  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とおけば、

$$M = mr^2\dot{\theta} \quad (37)$$

という表現が得られます。角運動量を考える際は、極座標の使用がしばしば有効になります。

さて、(36) を時間で微分すると、次式のようにになります。

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= m(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) \\ &= \mathbf{r} \times m\mathbf{a} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$  であることと、運動方程式  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  をもちいています。

上式において、 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  は力が質点におよぼすトルクとよばれ、これが角運動量を変化させるはたらきをします。もし力  $\mathbf{F}$  が中心力、すなわち原点方向を向いていれば、トルクは0なので  $dM/dt = 0$ 、すなわち  $M$  は時間によらず一定です。中心力のもとでの運動に沿って  $M$  が不変に保たれる、というのが角運動量保存則です。

さて、コリオリ力は中心力ではないので、角運動量は保存しません。コリオリ力のもとで運動する粒子を考えれば、粒子はトルクを受けながら運動し、角運動量は時間の関数として、おそらくは複雑に変化するでしょう。

ところが、コリオリ力のもとでの運動において、角運動量そのものは保存しないものの、それに別の項を付加した量が保存することを示すことができます。これは磁場中の電子がもつ保存量となるものであり、われわれにとって重要な量です。

この保存量を導くために、コリオリ力の具体形は必要ありません。コリオリ力が回転系における見かけの力であることだけをもちいて、以下のようにして導くことができます。

まず、回転系に移ることによって角運動量がどのように違って見えるかを考えます。もとの座標系  $S_0$  における極座標を  $R\Theta$  とすれば、この系における角運動量は  $mR^2\dot{\Theta}$  です。

この  $S_0$  系にたいして角速度  $\omega$  で回転する  $S$  系を考え、この極座標を  $r\theta$  とすれば、この系での角運動量は  $mr^2\dot{\theta}$  であり、 $\dot{\Theta}$  と  $\dot{\theta}$  の関係は当然、

$$\dot{\Theta} = \dot{\theta} + \omega \quad (39)$$

です。よって、両系から見た角運動量の関係式として、

$$mR^2\dot{\Theta} = mr^2\dot{\theta} + mr^2\omega \quad (40)$$

が得られます。

さて、 $S_0$  系では角運動量が保存すると仮定すれば、 $mR^2\dot{\Theta} = C$  (定数) です。よって上式から、回転系  $S$  における関係式として、

$$mr^2\dot{\theta} + mr^2\omega = C \quad (41)$$

が得られます。これは、角運動量が保存する系を回転系から見た場合、角運動量は保存されなくなるものの、上式の左辺が新たな保存量になることを意味します。

もし  $S_0$  系が自由空間であれば、回転系に移ることでコリオリ力と遠心力が現れます。自由空間ではもちろん角運動量が保存します。よって、コリオリ力と遠心力が存在する系において (41) という保存則が成り立つことがわかります。

ところが、遠心力は中心力なので角運動量の変化に寄与しません。そこで (41) は、コリオリ力、あるいはそれと同じタイプのみが存在する系でも成立します。

このように見る場合は、(41) に含まれる  $\omega$  は、コリオリ力  $\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \mathbf{J} \mathbf{v}$  の向きと強さを指定するパラメータとしてはたります。すなわち、そのような力のもとでの運動にたいして、(41) の左辺が保存量となるわけです。

上の結果は、逆にもちいることができます。角運動量に、 $r^2$  に比例する項を加えたものが保存するような系があったとすると、うまく回転系に移れば角運動量が保存します。そして、角運動量が保存するということは、その系から見れば中心力のもとでの運動になることを意味します。

結局、(41) という形の保存則をもつ系は、中心力場の系と対等となります。ここで「対等」とは、うまく回転系に移れば同じに見えるということです。

## 6.6.2 極座標で表した運動方程式

回転座標系への変換と、極座標への変換はよく似ていて、しばしば混乱を招きます。

回転座標系は非慣性系であり、慣性系とは異なった運動法則をもつ空間に移って、そこで現象を観察することを意味します。たとえば、自由粒子の等速直線運動を回転系から見れば、それは加速度をとれない、その加速度を説明するために見かけの力が導入されます。

一方、極座標への変換においては、空間自体が変わるわけではなく、そこに貼り付ける座標の網目を取り

替えられます。しかし、その網目がまっすぐではなく曲がっているために、やはり非慣性系における見かけの力と同じような効果が生じます。

すなわち、たとえ粒子が直線運動をしても、それを観測する座標が曲がっていることで、その座標で表現した運動は加速度をもちます。

極座標、あるいは一般に曲線座標をもちいることで現れる加速度は、非慣性系で現れるものとは本質的に異なるものです。よって、同じように見かけの力とよぶことは望ましくありません。しかし適当なよび名もないようなので、以下では「曲線座標にともなう見かけの力」のようによぶことにします。

では実際に、極座標で表した運動方程式を導きます。まず、もとのデカルト座標で書いた運動方程式を一般に、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{cases} \quad (42)$$

とします。極座標の定義は、

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (43)$$

ですから、これを(42)に代入して、 $r(t)$ 、 $\theta(t)$ に関する微分方程式を導けばよいわけです。しかし、この計算は§6.4.1のときと同様に、成分ごとにやるとかなり煩雑になってしまいます。

そこで、複素数表記をもちいます。まず(42)は、

$$m\ddot{u} = F \quad (44)$$

のように書けます。ここで $F = F_x + iF_y$ です。一方(43)は、

$$u = re^{i\theta} \quad (45)$$

と書けるので、これを(44)に代入します。まず(45)の時間微分を計算すると、

$$\begin{cases} \dot{u} = (\dot{r} + ir\dot{\theta})e^{i\theta} \\ \ddot{u} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + i(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})]e^{i\theta} \end{cases} \quad (46)$$

となります。

上式では、回転系に移るときと同様に、成分を回すための因子 $e^{i\theta}$ が共通にかかっています。いまの場合、もとの $xy$ 座標にたいして、 $r\theta$ 座標が定義する局所的な直交座標が $\theta$ だけ傾いていることによります。

すなわち、上式の $e^{i\theta}$ がかかる部分の実数成分は $r$ 方向成分、虚数成分は $\theta$ 方向成分を表していて、それを $\theta$ だけ回してはじめて $xy$ 成分となります。

極座標においては、ベクトル量はすべてそのように、 $r$ 方向成分と $\theta$ 方向成分で表すと便利です。そこ

で、(44)における力も、 $r$ 方向成分 $F_r$ と、 $\theta$ 方向成分 $F_\theta$ にわけます。すると、 $F = (F_r + iF_\theta)e^{i\theta}$ と書くことができ、(44)に代入したときに因子 $e^{i\theta}$ が落ちます。

結果として、極座標で書いた運動方程式が次のように得られます。

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases} \quad (47)$$

上式のうち、たとえば第1式において、仮に $r$ がデカルト座標のうちの一つであれば、 $r$ にたいしての運動方程式は $m\ddot{r} = F_r$ となるべきところです。左辺に余分に現れた項は、座標が曲がっていることによって生じたものです。

そこで、この項を右辺に回して、 $mr\dot{\theta}^2$ を力の一部として扱うことが可能です。これは $mr\omega^2$ という遠心力の形をしていますが、回転座標系において現れる遠心力と同じものではありません。すなわち、曲線座標にともなって現れる見かけの力です。

さて、上の結果を用いれば、角運動量保存則にたいして、前節とは別の証明ができます。まず、(47)の第2式の両辺に $r$ をかければ、

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}) = rF_\theta \quad (48)$$

となりますが、この左辺は $d(mr^2\dot{\theta})/dt$ と変形できて、これは角運動量 $M = mr^2\dot{\theta}$ の時間微分です。よって、もし $F_\theta = 0$ であれば、すなわち中心力であれば、

$$M = mr^2\dot{\theta} = C \quad (49)$$

となり、角運動量保存則が導かれます。

さて、(47)の第1式は $r$ 方向の力 $F_r$ によって決定される方程式ですが、変数 $\theta$ も含んでいるので、 $r$ 座標にたいしての単独の運動方程式ではありません。しかし、もし中心力の場合なら(49)が成り立つので、これを $\dot{\theta}$ で解いて第1式に代入すれば、 $r$ だけの方程式にできます。すなわち、

$$m\ddot{r} = \frac{C^2}{mr^3} + F_r \quad (50)$$

が得られます。

上式における右辺の第1項は、運動を $r$ 方向に1次元的に見たときに、原点から遠ざけようとする反発力としてはたります。これはもともと $mr\dot{\theta}^2$ という遠心力の形をした項なので、**遠心力障壁** (barrier of centrifugal force) とよばれます。

この遠心力障壁の意味を調べるために、上式で自由粒子の場合、すなわち、

$$m\ddot{r} = \frac{C^2}{mr^3} \quad (51)$$

を考えましょう。

まず、粒子が原点を通過する等速直線運動を行う場合を考えます。そのような運動は角運動量をもたないので  $C = 0$ 、よって上式は  $\ddot{r} = 0$  となって、 $r$  座標に関して 1 次元的に考えても自由運動となります。

しかし、原点を通らない運動の場合は、 $C$  は 0 でなくなり、上式の右辺は  $r \rightarrow 0$  とともに無限大に発散します。つまり、原点に近づくことに抵抗する力としてはたります。

ここで、原点をかすめて通る粒子を考えて、その  $r$  座標の時間変化を追ってみましょう。粒子が原点に近づくにつれて  $r$  は減少しますが、0 にはならず、ある値で最小となったのちに増加に転じます。この  $r$  方向の 1 次元的な運動を説明するためには、 $r$  の正方向に加速度を与える力が必要です。

すなわち、原点から遠ざけようとする力が実際に存在するわけではなく、あくまでも上のような  $r$  座標の時間変化を説明するために、遠心力障壁が現れます。

あとで磁場のレンズ作用を考える際には、光軸を出た電子がふたたび光軸と交わるかが問題になります。その場合は、 $r$  のみならず運動方程式の中に遠心力障壁が現れるかどうかで判断ができます。

### 6.6.3 極座標で見たコリオリ力

コリオリ力と遠心力が存在する系の運動方程式 (30) を、極座標で表してみましょう。まず (30) を複素数表記で書けば、

$$m\ddot{u} = -2m\omega(i\dot{u}) + m\omega^2 u \quad (52)$$

です。

極座標で表した運動方程式の一般形 (47) がすでに求められているので、あとは、上式の右辺に対応する  $F_r$  と  $F_\theta$  を求めるだけです。

そのためには、右辺に  $u = re^{i\theta}$  を代入して  $e^{i\theta}$  をくり出せばよく、その残りが  $F_r + iF_\theta$  を与えます。そうやって求めた  $F_r$  と  $F_\theta$  を (47) に入れば、最終的に次式が得られます。

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 2m\omega r\dot{\theta} + m\omega^2 r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -2m\omega\dot{r} \end{cases} \quad (53)$$

さて §6.6.1 では、コリオリ力が存在する系での保存則 (41) を導きましたが、これは (53) をもちいれば直接示すことができます。

まず、(53) の第 2 式の両辺に  $r$  をかければ、左辺は前節と同じ  $d(mr^2\dot{\theta})/dt$  となります。一方、右辺もやはり、 $-2m\omega r\dot{r} = -d(mr^2\omega)/dt$  という時間微分になります。よって、保存則 (41) が導かれます。

さて、前節では角運動量保存則をもちいて  $r$  成分のみの運動方程式を導きましたが、これと同様のことをいまの場合も行うことができます。すなわち、(41) を  $\dot{\theta}$  で解いて、それを (53) の第 1 式に代入します。やや面倒な計算の結果、次の結果が得られます。

$$m\ddot{r} = \frac{C^2}{mr^3} \quad (54)$$

上の結果は、(50) において  $F_r = 0$  とおいた場合になっています。もちろん、いまの場合は  $F_r$  は 0 ではなく、コリオリ力も遠心力も  $r$  方向成分をもち、両者が恒等的に打ち消し合うわけでもありません。

しかし (54) の結果は、計算などしなくても導けるものです。すなわち、運動方程式 (52) は自由空間を回転座標系から見たものですが、原点からの距離は回転系に移っても変化しません。よって、 $r(t)$  は自由空間における場合と同じ方程式をみたすべきであり、それがすなわち (54) です。

さらに、コリオリ力だけが存在する場合に  $r$  方向の運動方程式がどうなるかもすぐわかります。遠心力は  $F_r = m\omega^2 r$  であり、コリオリ力と同時にこれが存在する結果として (54) となっているわけです。そこで、もし遠心力が存在しなければ、 $r$  方向の運動方程式は、

$$m\ddot{r} = \frac{C^2}{mr^3} - m\omega^2 r \quad (55)$$

となり、これもなんら計算を要しません。

上式の右辺第 2 項は、自由空間と、コリオリ力が存在する系の違いを示します。すなわち、コリオリ力を  $r$  方向に 1 次元的に見れば、原点に向かう向心力であるということです。

## 6.7 磁場中の電子の運動

### 6.7.1 一様磁場中の運動

コリオリ力にたいして前節までに得られた結果は、すべてローレンツ力の性質として言い換えることができます。

まず、磁場中の電子の運動方程式は、(5)において電子の電荷を  $q = -e < 0$  とおくことで、

$$m\mathbf{a} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (56)$$

となります。運動は  $xy$  平面に限定されているとして、磁場は  $z$  方向を向いて一様とすれば、上式は  $90^\circ$  回転の行列  $J$  をもちいて、

$$m\mathbf{a} = eB\mathbf{J}\mathbf{v} \quad (57)$$

と書けます。

(57)の右辺は、コリオリ力  $\mathbf{F} = -2m\omega\mathbf{J}\mathbf{v}$  と同じ形をしていて、 $\omega = -eB/(2m)$  とおいた場合になっています。そこでまず、

$$\omega_L = \frac{eB}{2m} \quad (58)$$

とおきます。これはラーモア角速度とよべます。これをもちいれば(57)は、

$$m\mathbf{a} = 2m\omega_L\mathbf{J}\mathbf{v} \quad (59)$$

と書けます。すなわち磁場のローレンツ力は、 $-\omega_L$  で回転する座標系に移ったときに現れるコリオリ力と同じということです。

この対応をもちいて、前節までの結果をローレンツ力の場合に引き移してみましょう。まず §6.5.2 では、コリオリ力が存在する系を回転系から眺めたときの運動方程式を考えました。そのときの議論を適用すれば、磁場が存在する系を  $\omega$  で回転する系から眺めたときの運動方程式が、次のように得られます。

$$m\mathbf{a} = 2m(\omega_L - \omega)\mathbf{J}\mathbf{v} - m\omega(2\omega_L - \omega)\mathbf{r} \quad (60)$$

磁場の強度は、 $\omega_L$  の中に(58)として含まれています。

上式は、 $\omega$  を徐々に大きくしていったときに、どのようにローレンツ力が打ち消され、どのように向心力が現れてくるかを示しています。特に  $\omega = \omega_L$  と選べば、ローレンツ力とコリオリ力が完全に打ち消し合って右辺第1項は0となり、そして第2項は向心力となります。すなわち上式は、

$$m\mathbf{a} = -m\omega_L^2\mathbf{r} \quad (61)$$

となって、2次元調和振動の方程式となります。磁場が存在する慣性系  $S_0$  にたいして、 $\omega_L$  で回転する座標系がラーモア座標系とよべれます。

なお、 $\omega = \omega_L$  と選んだときに残る向心力は  $B^2$  に比例するので、もし磁場が摂動と見なしうる程度に

弱ければ、その向心力は高次の量として無視できます。よって弱い磁場のかかった系は、うまく回転系に移って見れば磁場の作用が消えることとなります。これがラーモアの定理 (Larmor's theorem) とよばれるものです。もちろんわれわれにとっては、その向心力は磁場型レンズの集束作用を説明するものですから、無視してはいけません。

つぎに、極座標をもちいて得られた §6.6 の結果を引き移します。コリオリ力と遠心力が存在する系の運動方程式を極座標で書いたものが(53)です。これらにおいて、遠心力を落とし、さらに  $\omega = -\omega_L = -eB/(2m)$  とおいて磁場の場合にかえれば、最終的に、

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -eBr\dot{\theta} \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = eB\dot{r} \end{cases} \quad (62)$$

が得られます。

上式から、まず第2式を時間で積分することで、

$$mr^2\dot{\theta} - \frac{eB}{2}r^2 = C \quad (63)$$

という保存則が得られます。これはもちろん、(41)において  $\omega = -\omega_L$  とおいても得られます。

上式を  $\dot{\theta}$  で解いて第1式に代入すれば、 $r(t)$  に関しての方程式が得られます。結果は、

$$m\ddot{r} = \frac{C^2}{mr^3} - \frac{e^2B^2}{4m}r \quad (64)$$

となります。これは(55)に相当し、右辺第2項が、ローレンツ力を  $r$  方向に1次元的に見たときの作用です。

さて、§6.6.1における議論によって、(63)の形の保存量をもつ系は、うまく回転座標系にうつれば角運動量が保存するようにできるのでした。すなわち、ローレンツ力が中心力場として見えるような座標系の存在が結論されます。この結果はすでに、コリオリ力の座標変換を考えることで(61)のように得られたわけですが、そのような計算なしで、(63)という保存則の存在だけで結論できるのでした。

遠心力障壁に関しても触れておきます。(63)において  $r = 0$  とおけば  $C = 0$ 、すなわち原点を通過する電子にたいしては  $C = 0$  であることがわかります。そこで、原点から出発した電子にたいしては(64)における遠心力障壁が取り払われ、よって、また原点に戻ってくることができます。

磁場の存在する系では角運動量が保存せず、よって電子にトルクがはたらくにも関わらず、ちゃんと原点に戻ってくるのは不思議のようにも思えます。しか



し、ローレンツ力が中心力に見えるような回転系が存在し、その系では原点を通る運動は単振動ですから、その運動をもとの系から見ても、やはり原点に戻らなくてはなりません。

もちろん、サイクロトロン運動が円運動であることを考えればこの結果は当然ですが、一般の磁場分布を考察する際に、このような考察が意味をもってきます。

### 6.7.2 回転座標系から見たサイクロトロン運動

一様磁場中で電子が行うサイクロトロン運動を、ラーモア座標系とはかぎらない一般の回転座標系から眺めた場合に、どのように見えるかを調べてみましょう。

このために、磁場の存在する系を  $\omega$  で回転する系から見たときの運動方程式、すなわち (60) をもちいます。

(60)において、右辺の第1項は、もともと存在するローレンツ力と、見かけの力として新たに生じるコリオリ力を合わせたものです。第2項は、ローレンツ力が速度に依存するために座標変換によって生じる中心力の項と、見かけの力として生じる遠心力を合わせたものです。

$\omega = 0$  の場合から始めて、徐々に  $\omega$  を大きくしてみましょう。まず右辺の第1項においては、ローレンツ力は、徐々にコリオリ力によって打ち消されていきます。 $\omega = \omega_L$  では完全に打ち消され、それ以上  $\omega$  が大きくなると、最初とは逆向きのローレンツ力が生じたように見えます。

一方、右辺第2項を  $\omega$  の関数として見ると、 $\omega = 0$  のときは0であり、 $\omega = \omega_L$  で向心力が最大になったあと、 $\omega = 2\omega_L$  で0にもどり、それ以上  $\omega$  を増やすと逆方向、つまり向心力ではなく遠心力に転じます。

この様子は、サイクロトロン運動を回転座標系から眺めた様子を実際に計算してみればわかりやすいでしょう。Fig.6は、 $\omega$  の値を変えながら、回転系から見た運動を描いたものです。

この図においては、原点において  $x$  軸の正方向に初速を与えられた電子と、同じ初速で原点から離れた点を出発した電子を描いています。二つの円が慣性系から見たサイクロトロン運動、太い曲線がそれらを回転系から眺めた運動です。

$\omega$  の値の小さいうちは、円運動が円周方向に引きずられて、らせんのようになりますが、まだ円運動の延長です。しかし  $\omega$  を大きくしていくと、らせんがほ

どけて、原点まわりの回転という様相に近づいていきます。この過程において、ローレンツ力は徐々にコリオリ力に打ち消され、同時に向心力が増加していきます。

$\omega = \omega_L$  では、完全にローレンツ力はなくなり、向心力が最大になります。この場合の運動が、2次元の調和振動です。この特別な場合として、原点から出発した電子は、 $x$  軸上の単振動を行います。磁場のねじれの作用が消え、純粋に原点に向かう向心力になったわけです。

さらに  $\omega$  を大きくすると、ローレンツ力よりコリオリ力の方が勝ち、もとの円運動とは逆方向に回ろうとします。 $\omega = 2\omega_L$  では中心力はなくなり、最初と大きさが同じで逆向きの磁場が存在するときの運動となります。

$\omega$  が  $2\omega_L$  を超えると、向心力は遠心力の方向に切り替わります。この遠心力は  $\omega$  の増加とともにいくらでも大きくなります。しかし、それによって電子が遠くに飛んで行ってしまうということはありません。コリオリ力が同時に大きくなる結果として、結局電子は飛び去ることなく、原点の近くにとどまります。

この計算例によって実感されるように、回転系に移って運動を眺めるということは、運動を円周方向に引き伸ばして見るということです。その運動を説明するためにコリオリ力や遠心力が登場しますが、そのような説明以前に、引き伸ばされた運動がどうなるかはだいたい想像できるわけです。

このことを留意するなら、電子が遠くに飛んで行かないということを言うために、コリオリ力や遠心力は必要ありません。円周方向にどのように引き伸ばしても、原点からの距離が変わることはないからです。

同じ理由で、コリオリ力が打ち消されたときに、遠心力が残るか向心力が残るかという議論も必要ありません。電子が原点付近にとどまる以上、向心力が残るのでなければなりません。

なお、このように円運動を引き伸ばしてできる運動は、実際に「体験」できます。遊園地のコーヒーカップの動きは、円運動の上にさらに小さな円運動を重ねた、いわば円運動の入れ子のようです。円運動の回転速度の比率を変えていくと、ちょうどここで示したような多様なパターンを描きます。

### 6.7.3 非一様な磁場中の運動

いままでは一様な磁場分布を考えていて、電子の運動はサイクロトロン運動、すなわち円運動でした。

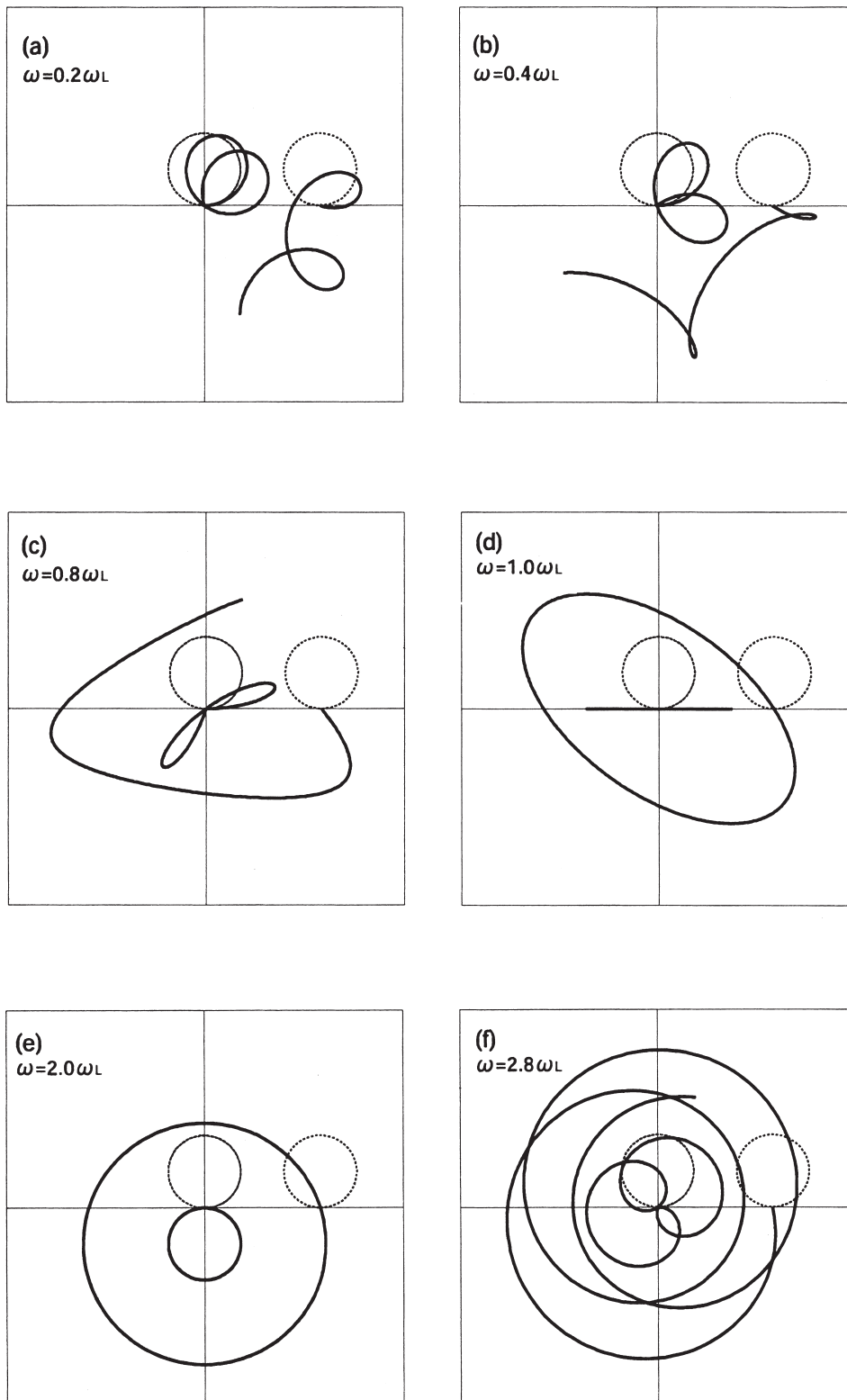


Fig. 6: Cyclotron motion of electrons viewed from rotation coordinate systems with different angle velocities.

もし磁場が一様でなくなった場合、いままでの議論はどのように変更されるかを考えましょう。

磁場が一様ではなくなっても、原点まわりの回転対称性は保たれているとします。この場合の  $xy$  平面の磁場分布は、一般に  $r^2 = x^2 + y^2$  のべき展開の形で、

$$B(r) = B_0 + B_2 r^2 + B_4 r^4 + \dots \quad (65)$$

のように与えることができます。もし  $B_0$  の項だけであれば一様場、 $B_2$  以降の項が存在すれば非一様場です。

まず、このような磁場中における角運動量を考えてみます。一様場では保存則 (63) が存在しましたが、いまの場合はどうでしょうか。これを調べるには、やはり運動方程式を極座標で表し、その  $\theta$  方向に注目します。

一様場のときの、極座標で表した運動方程式は (62) でした。いまの場合は、 $B$  を (65) の  $B(r)$  でおきかえればよいわけです。これによって、 $\theta$  方向の運動方程式は次のようになります。

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = e(B_0 + B_2 r^2 + \dots)\dot{r} \quad (66)$$

この両辺に  $r$  をかければ、やはり全体を時間微分の形で書くことができ、保存則として次式が導かれます。

$$mr^2\dot{\theta} - \frac{e}{2}r^2 \left( B_0 + \frac{B_2}{2}r^2 + \frac{B_4}{3}r^4 + \dots \right) = C \quad (67)$$

よって、磁場が一様でなくても、対応する保存則が依然として存在します。

さて、一様磁場の場合は、適当な回転座標系に移ることで、角運動量  $mr^2\dot{\theta}$  が保存されるようにできました。これは (40)、すなわち、回転座標系に移ることで、 $r^2$  に比例する項を角運動量に追加できるということに依っています。

ところが、いまの場合は (67) のように  $r$  の 4 次以上の項が含まれています。したがって、回転系の角速度をどう選んでも、 $mr^2\dot{\theta}$  が保存するようにはできません。これは、磁場の作用が中心力場のように見えるような座標系は存在しないことを意味します。

ここで、第 4 章で行った、軌道方程式の 1 次近似の話の思い出しましょう。電子軌道が光軸の近傍だけを通過する状況のもとでは、座標の高次項を無視することができます。この 1 次近似のもとでは、収差の寄与はなくなり、1 次軌道方程式は理想的なレンズ作用を表すのでした。

いまの場合も、議論を原点付近の運動に限定するなら、 $r$  の高次項を無視できるでしょう。もし、(67)

において  $B_0$  の項だけを残す近似のもとで考えれば、一様場の場合と同じになります。したがって、 $\omega_L = eB_0/(2m)$  で回転する座標系にうつれば角運動量が保存し、中心力場となります。この座標を、一般の磁場分布にたいしてのラーモア座標系とよびます。

たとえ高次項を考慮する場合でも、このように定義したラーモア座標系に移って考えるのが有利です。すなわち、厳密な運動方程式をそのような座標で表しておけば、最低次の近似では 2 次元調和振動の方程式となり、これが近軸理論として理想的な状況を与えます。そして、高次項を取り入れれば、理想的な運動から逸らそうという作用、すなわち収差に関しての理論となります。

そこで、一般の磁場分布にたいしての、ラーモア座標系から見た運動方程式を導いてみましょう。このために前節までの結果を利用することもできますが、複素数表記をもちいれば、最初から計算をやり直してもたいした計算にはなりません。

まず運動方程式 (57) は、これを慣性系  $S_0$  におけるものとして複素座標  $U = X + iY$  で表せば、

$$m\ddot{U} = eB(i\dot{U}) \quad (68)$$

と書けます。

この  $S_0$  系から、一般の角速度  $\omega$  で回転する系  $S$  に移ります。このために、上式に  $U = ue^{i\omega t}$  を代入し、両辺から  $e^{i\omega t}$  の因子をおとせば、

$$m(\ddot{u} + 2\omega i\dot{u} - \omega^2 u) = eB(i\dot{u} - \omega u) \quad (69)$$

が得られます。上式において、 $B$  として (65) の  $B(r)$  をもちいれば、

$$m(\ddot{u} + 2\omega i\dot{u} - \omega^2 u) = e(B_0 + B_2 r^2 + B_4 r^4 + \dots)(i\dot{u} - \omega u) \quad (70)$$

となります。

上式において、右辺の展開のうちの  $B_0$  の項だけを残せば一様場の場合となります。そこで、 $B_0$  の項だけを左辺にまわし、右辺には高次の項、すなわち収差をつくる項を残せばわかりやすいでしょう。

さらに  $\omega = \omega_L$  のときを考えれば、左辺は 2 次元調和振動の方程式の形になります。結局、ラーモア座標系における運動方程式として次式が得られます。

$$m\ddot{u} + m\omega_L^2 u = e(B_2 r^2 + B_4 r^4 + \dots)(i\dot{u} - \omega_L u) \quad (71)$$

この右辺は、実数形になおしたほうが考えやすいでしょう。簡単のために  $B_4$  以降の係数がすべて0の場合を考えると、上式は実数形で次のようになります。

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m\omega_L^2 x = eB_2[-\omega_L x(x^2 + y^2) \\ \qquad \qquad \qquad -\dot{y}(x^2 + y^2)] \\ m\ddot{y} + m\omega_L^2 y = eB_2[-\omega_L y(x^2 + y^2) \\ \qquad \qquad \qquad +\dot{x}(x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (72)$$

上式の右辺のうち、 $\omega_L$  のかかる部分だけなら、中心力場であることは保たれます。これは、中心力場の対称性をたもったまま、力のポテンシャル分布を調和振動の場合から歪ませる効果となります。このように、ポテンシャルが高次の展開項を含む場合が、一般に非線形振動とよばれるものです。

しかし残りの項の存在によって、力の場は中心力場ではなくなります。これらは速度に依存し、場所によって強度が変化するコリオリ力のような作用です。ラーモア座標に移っても、このように中心力からはずれた作用が高次の効果として残ってしまいます。

では、一様場と非一様場の場合の、電子の運動の違いを計算してみましょう。まず Fig.7 は、一様場の場合に、慣性系  $XY$  の原点から  $X$  方向にいろいろな初速を与えた場合のサイクロトロン運動の様子です。ラーモア座標  $xy$  はこの運動を忠実に追いかけて、この系から見た電子の運動は  $x$  軸上の単振動となります。

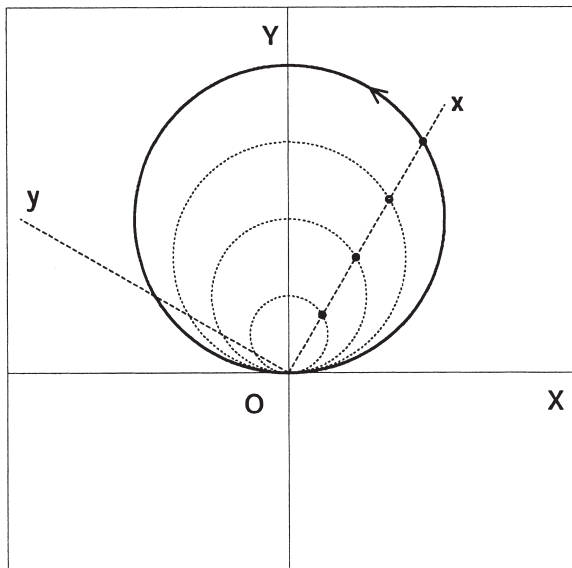


Fig. 7: The Larmor frame follows cyclotron motion of electrons in a uniform magnetic field.

Fig.8(a) は、非一様場における運動を慣性系から見たものです。この図は、(65) の展開において  $B_2$  の項までを考慮し、かつ  $B_2 > 0$  の場合です。したがって、原点から遠いほど磁場が強くなります。

この場合、電子が原点からはなれるほど、軌道の曲率半径が小さくなります。これは、一様磁場中のサイクロトロン半径が  $r_c = mv/(eB)$  で与えられ、磁場強度に反比例することを思い出せば理解できます。さらに、サイクロトロン角周波数は  $\omega_c = eB/m$  でしたから、電子が原点から遠ざかるほど速く回ろうとすることがわかります。

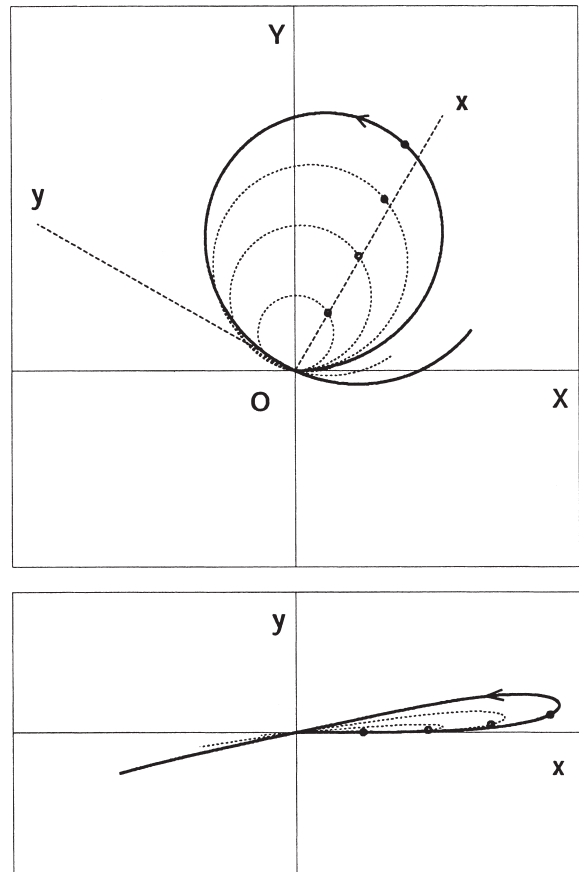


Fig. 8: (a) Motion of electrons in a non-uniform magnetic field. (b) Electron trajectories viewed from the Larmor frame.

これらのことから、ラーモア座標系は電子を忠実に追いかけることはできず、原点からはなれるほど  $x$  軸から逸れていきます。

この逸れかたは、原点からの距離にたいして非線形であるので、たとえ回転座標系の角速度を変更したとしても、すべての電子を忠実に追いかけること

はできません。そこで、原点付近の軌道を優先しようというのが近軸理論の思想であり、そのように一般の磁場分布にたいするラーモア座標系が定義されているわけです。

ラーモア座標系から見た運動が Fig.8(b) です。この図の電子軌道は、ラーモア座標系に移っても完全に中心力場になりきれずに残される部分の作用を示しています。すなわち (72) の高次項の寄与です。

さて、図の電子はラーモア座標系から逸れては行くものの、すべての軌道は原点  $O$  に戻っています。これは §6.7.1 の最後での議論と同様、遠心力障壁を考えれば説明がつかます。

まず、磁場が一様でなくても保存則 (67) が存在します。(67) において  $r = 0$  とおけば  $C = 0$ 、すなわち原点を通過する電子にたいしては  $C = 0$  です。

一方、磁場が非一様である場合の  $r$  にたいしての運動方程式は、(64) の右辺にさらに  $r$  の高次項が続く形になりますが、遠心力障壁はやはり  $C = 0$  では 0 になります。したがって、原点を出た電子はふたたび原点に戻ってくるのが結論されます。

いまの場合、磁場の作用が厳密に中心力のように見える回転系は存在しません。したがって、原点を出た電子が原点に戻るという事実は、§6.7.1 におけるよりも直感的な理解が難しくなっています。

## 6.8 収差論にむけて

本章では、電子の運動を  $xy$  平面に射影して考えて、磁場のレンズ作用を抽出する手法を述べました。最後の節では近軸理論と収差に対応する概念が現れましたが、これはまだレンズとしての理論にはなっていません。

レンズとしての評価のためには、独立変数は時間  $t$  でなく、光軸に沿った  $z$  座標でなければなりません。 $t$  と  $z$  が単純に比例するのなら問題ありませんが、一般にこれは非線形な関係となり、この寄与まで含めなければ収差公式は導けません。

さらに、磁場は  $xy$  平面上の分布だけが問題なのではなく、 $z$  方向の変化まで考えなければなりません。しかもこれらは、磁場のみたすべき方程式によって互いに関連しています。

本章の範囲では、一様磁場は理想的な作用をもつことにはなりますが、上のような効果を取り入れれば、一様磁場のレンズは収差をもつことにはなります。本章の結果を出発点として、これらの影響を加えて行く

ことは可能ですが、これを正直に行うのは現実的ではありません。徐々に数式が複雑さを増し、途中で行き先を見失う可能性が大です。

そこで、収差理論を理解するためには、なるべく早い段階で変分原理による議論に移るべきです。これと複素数表記を併用すれば、自力で収差係数までたどり着くのは困難ではありません。本稿においてこの過程をすべて記すつもりはありませんが、本質的な道筋だけは述べたいと考えています。

なお、本章では磁場中での電子の運動にたいしての保存則 (67) を導きましたが、運動方程式だけではこの法則の本質を議論できません。そのような保存則をもつ系は特別な意味をもつはずですが、これは変分原理のもとで明らかとなります。

今回はこのような議論を行い、収差係数を導くところまでを述べる予定です。

## 6.9 まとめ

本章では、コリオリ力の解析をもとにして、磁場によるローレンツ力の性質を議論しました。要点をまとめると次のようになります。

(1) レンズ作用とは光軸に向かう中心力場である。その作用のもとで、 $xy$  平面に射影した電子の運動は 2 次元調和振動となる。ローレンツ力には中心力場としての作用が内在し、この事実によって磁場のレンズとしてののはたらきが説明される。

(2) ローレンツ力は速度に依存するために、運動する座標系に移ると電場による力が付け加わる。もし回転座標系に移るなら、電場は回転中心方向を向く。

(3) 自由空間における運動方程式を回転座標系に変換すると、見かけの力としてのコリオリ力と遠心力が現れる。磁場の存在する系を回転系間で変換することで、ローレンツ力とコリオリ力、そして電場による中心力と遠心力が互いに混ぜ合わされる。

(4) 磁場の作用が中心力場として見えるような回転系、すなわちラーモア座標系が存在する。この座標系のもとでは、ローレンツ力がコリオリ力によって打ち消され、同時に、中心方向の電場が遠心力を打ち消すことにより、最終的に向心力成分が残される。

(5) ローレンツ力のもとでは角運動量は保存しないが、それに類似の保存則が成立する。ローレンツ力が中心力に見えるような座標系の存在は、この保存則だけから結論できる。また、原点から出た電子が原点に戻ることを保証するのがこの保存則である。

(6) 非一様な磁場中の運動は、ラーモア座標系に移ることで、近軸領域のみが中心力場中の作用となる。これはレンズとしての1次理論に対応し、軸外で現れる高次項は収差に対応する。

## 6.10 文献紹介

電磁場の座標変換は多くの教科書が扱っていますが、たいていは相対論がらみです。非相対論的な議論からはじめているものとしては、たとえば次のものがあります。

[1] 大田浩一, 電磁気学 I,II, 丸善 (2000)

複素数が認知されるに至った歴史や, 基本的な演算に関しては, 次のものがわかりやすく書かれています。

[2] 高見頻雄, 桑原邦夫訳, ソーヤー・線形代数とは何か, 岩波書店 (1978)

[3] 志賀浩二, 複素数 30 講, 朝倉書店 (1989)

### 前回の訂正

(1) Fig.1 は  $\Delta x(z)$  が負の場合を描いていますが, そのことに触れていませんでした。電子レンズは  $\Delta x(z) < 0$  の場合が多いのでそのようにしました。図の方向に正方向を定義するという意味ではありません。

(2) Fig.8 において, tangential と sagittal のコメントが逆でした。